Πρόταση
Αν (A_ν) ακολουθία μηδενικών συνόλων, τότε και το σύνολο $\cup A_\nu$ είναι μηδενικό.
Απόδειξη

$$0 \leq \bar{V}(\cup A_\nu) \leq \sum \bar{V}(A_\nu) = \lim_k \sum_{\nu=1}^{k} \bar{V}(A_\nu) = \lim_k 0 = 0$$

Χαρακτηρισμός του μέτρου Lebesgue ως πλήρες μέτρο

Πρόταση
Αν $V(A)=0$ τότε ένα υποσύνολο του A είναι μετρήσιμο και μηδενικό
Απόδειξη
Έστω $\Gamma \subseteq A$, Γ τυχαίο
$\bar{V}(\Gamma) \leq \bar{V}(A) = V(A) = 0 \Rightarrow \Gamma$ μετρήσιμο
Έτσι, $0 \leq \bar{V}(\Gamma) = V(\Gamma) \leq V(A) = 0$

Ιδιότητα
Αν $P(x)$ μια λογική πρόταση, $x \in A$, $A \subseteq \mathbb{R}$ λέμε ότι $P(x)$ ισχύει σχεδόν παντού στο A ή για σχεδόν όλα τα $x \in A$ αν $\exists$ μηδενικό σύνολο E $E \subseteq A$ τ/ω $\forall x \in A-E$ η $P(x)$ αληθής

$V(A+c) = V(A)$ $A \in \mathcal{A}$, $c \in \mathbb{R}^n$ το μέτρο παραμένει σταθερό κατά τις μεταφορές

Πρόταση

Έστω $A \in \mathcal{A}$, $c \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$\lambda A + c := \{\lambda x + c : x \in A\}$

Τότε $\lambda A + c \in \mathcal{A}$ και επιπλέον ισχύει

$V(\lambda A + c) = |\lambda|^n V(A)$

Απόδειξη

• Ας είναι το $A = (a, b)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$

Αν $\lambda \geq 0$ τότε για $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

$\lambda A + c = [\lambda a_1 + \gamma_1, \lambda b_1 + \gamma_1] \times \dots \times [\lambda a_n + \gamma_n, \lambda b_n + \gamma_n]$

$V(\lambda A + c) = (-\lambda)(b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (-\lambda)(b_n - a_n) = (-\lambda)^n V(A)$

• Ας είναι το A στοιχειώδες τότε $A = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k$

$\lambda A + c = (\lambda I_1 + c) \cup (\lambda I_2 \cup c) \cup \dots \cup (\lambda I_k + c)$

Τότε $V(\lambda A + c) = \sum_{i=1}^{k} V(\lambda I_i + c) = \sum_{i=1}^{k} |\lambda|^n V(I_i) = |\lambda|^n V(A)$

• Ας είναι το A ανοιχτό και φραγμένο τότε $\lambda A + c \in \mathcal{A}_b$ και

$|\lambda|^n V(A) = \sup\{|\lambda|^n V(Y) : Y \subseteq A,\ Y \text{ στοιχ}\} =$

$= \sup\{V(\lambda Y + c) : \lambda Y + c \subseteq \lambda A + c,\ Y \text{ στοιχ.}\} =$

$= \sup\{V(Y) : Y \subseteq \lambda A + c,\ Y \text{ στοιχ}\} =$

$= V(\lambda A + c)$

• Ας είναι το A συμπαγές σύνολο (όμοια)

• Ας είναι A φραγμένο σύνολο

$|\lambda|^n V(A) = |\lambda|^n \overline{V}(A) = \inf\{|\lambda|^n V(G) : G \supseteq A,\ G \text{ ανοιχτό}\} =$

$= \inf\{V(\lambda G + c) : \lambda G + c \supseteq \lambda A + c,\ \lambda G + c \text{ ανοιχτό}\} \geq$

$\geq \inf\{V(G) : G \supseteq \lambda A + c,\ G \text{ ανοιχτό}\} =$

$= \overline{V}(\lambda A + c)$

από την άλλη $|\lambda|^n V(A) \leq \underline{V}(\lambda A + c) \leq \overline{V}(\lambda A + c)$

άρα προκύπτει η ισότητα

Τέλος, αν $A \in \mathcal{A}$ τότε η αύξουσα ακολουθία

$\lambda(A \cap B_\mu) + c$, $\mu \in \mathbb{N}$

έχει όρους στο $\mathcal{A}_b$ και $\bigcup_{\mu=1}^{\infty} (\lambda(A \cap B_\mu) + c) = \lambda A + c$

Έτσι, $\lambda A + c \in \mathcal{A}$ και επιπλέον
$$V(\lambda A + c) = \lim_{\mu \to \infty} V(\lambda(A \cap B_\mu) + c) =$$
$$= \lim_{\mu \to \infty} |\lambda|^4 \cdot V(A \cap B_\mu) = |\lambda|^4 \cdot V(A).$$

Μη μετρήσιμα σύνολα

Στο διάστημα $[0,1]$ ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας
$x \sigma y : x - y \in \mathbb{Q}$.
Έτσι το διάστημα $[0,1]$ χωρίζεται σε κλάσεις ισοδυναμ.
Έτσι $\sigma(a) = \{x \mid x - a \in \mathbb{Q}\}$
Εκ του αξιώματος της επιλογής υπάρχει μια συνάρτηση επιλογής η οποία επιλέγει από κάθε μια κλάση ένα μόνο στοιχείο.
Αν θεωρήσουμε λοιπόν το σύνολο E που περιέχει μόνο τα επιλεγμένα στοιχεία.
Έστω λοιπόν ότι $\exists\, V(E) = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$
Το σύνολο $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ είναι αριθμήσιμο και μάλιστα $\mathbb{Q} \cap [-1,1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ ώστε η συλλογή $\{E + q_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$
Έστι, $[0,1] \subseteq \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \{E + q \mid q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]\} \subseteq [-1,2]$

Απόδειξη

$$x \in [0,1] \Rightarrow x \in \sigma(x) \Rightarrow \exists\, \varepsilon_1 \in E : x - \varepsilon_1 = q \Rightarrow x = \varepsilon_1 + q$$

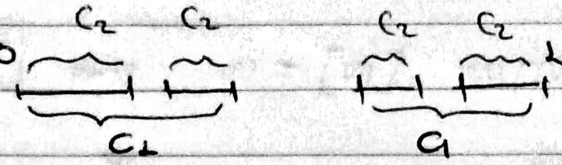
Έστω
$$(E + q_1) \cap (E + q_2) \neq \emptyset \Rightarrow \varepsilon_1 + q_1 = \varepsilon_2 + q_2 \Rightarrow \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = q_1 - q_2 \Rightarrow$$
$\Rightarrow \varepsilon_1 \sigma \varepsilon_2$ άτοπο.

$$V([0,1]) \leq V\left(\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \{E + q_\nu\}\right) \leq V([-1,2])$$
$$1 \leq \sum_{1=\nu}^{\infty} V(E + q_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} V(E) \leq 3 \quad \text{άτοπο γιατί}$$
αν $V(E) = \beta > 0 \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta = +\infty$ και αν $\beta = 0 \Rightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta = 0$

Έτσι, λοιπόν το E είναι μη μετρήσιμο

Υπάρχουν μη αριθμήσιμα σύνολα μηδενικά;

C - Cantor



$C_1 : [0,\frac{1}{3}]\cup[\frac{2}{3},1]$ ← 2 διαστήματα μήκος $\frac{1}{3}$

⋮ ← 2^2 διαστήματα μήκος $(\frac{1}{3})^2$

C_ν : $\bigcup$(2^ν κλειστά διαστήματα) μήκους $(\frac{1}{3})^\nu$

$C=\bigcap_1^\infty C_\nu$ τότε $\nu(C) = \nu(\bigcap_1^\infty C_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} \nu(C_\nu) = \lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^\nu = 0$

Πρόταση

Η συλλογή $\mathcal{A}$ είναι μια σ-Άλγεβρα

i) Αν $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in \mathcal{A}$

ii) Αν $A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$

iii) Αν $(A_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup A_\nu \in \mathcal{A}$

$\mathcal{B}$: η μικρότερη σ-Άλγεβρα όλων των ανοιχτών συνόλων

σύνολο Borel {
G_δ : η τομή καθε αριθμήσιμης συλλογής ανοιχτών συνόλων
F_δ : η ένωση καθε αριθμήσιμης συλλογής ανοιχτών συνόλων

Έτσι $G_{\delta\sigma}$: καθε αριθμ. συλλογής G_δ συνόλων

και $F_{\delta\sigma}$: ένωση " " " F_δ συνόλων

Θ : η συλλογή όλων των ανοιχτών διαστημάτων $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}$

$[\Theta] = c = [\tilde{\mathbb{R}} \times \tilde{\mathbb{R}}] = [\mathbb{R}]\cdot[\mathbb{R}] = [\mathbb{R}] = c$

$[A]=10$ και $[P(A)]=2^{[A]}$

$2^X \gneq X$ ①

όπου $[\mathbb{N}]=\omega$ και $[\mathbb{R}]=c$

τότε ①: $2^{\mathbb{R}} \gneq \mathbb{R}$

Έστω η απεικόνιση $\varphi: X \to P(X)$
τότε $\varphi(x) \subseteq X$

$Z=\{y\in X : y \notin \varphi(y) \in P(X)\}$

$\left.\begin{array}{l} \varphi(z)=Z \Rightarrow z\notin Z \\ z\in Z \end{array}\right\}$ άτοπο

άρα X με το $P(X)$ δεν έχουν την ίδια ισχύ

$[B]=[(\mathbb{R})^{2\mathbb{N}}] = 2^{\aleph_0\cdot\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = c$